I POLINOMI

I polinomi sono "oggetti" algebrici con cui noi abbiamo già lavorato, pur non sapendo cosa essi fossero; soprattutto nelle espressioni, ci è capitato di agire sui polinomi.

Si definisce POLINOMIO un insieme di monomi addizonati tra loro algebricamente;
ad esempio

3a+ 2b -c   è un polinomio; praticamente, questo polinomio è stato costruito condiderando i tre monomi 3a   2b   -c   e li si è legati tra loro tramite addizione algebrica ossia scrivendoli uno di seguito all'altro, ognuno con il proprio segno, ottenendo, appunto:
3a+ 2b -c

NOME DI UN POLINOMIO

A seconda della quantità di monomi che un polinomio possiede, esistono diversi nomi attribuibili ad un polinomio:

-se un polinomio possiede due monomi si chiama binomio;
- se un polinomio possiede tre monomi si chiama trinomio;
- se un polinomio possiede quattro monomi si chiama quadrinomio;
- e un polinomio possiede cinque o più monomi viene chiamato semplicemente polinomio.

POLINOMIO RIDOTTO A FORMA NORMALE

Consideriamo il POLINOMIO di prima:

3a+ 2b -c

Se si considerano questi tre monomi, si nota molto facilmente che non ci sono monomi simili tra loro (tutti e tre hanno, infatti, parte letterale diversa).
Bene, allora, in questo caso, si dice che il polinomio è RIDOTTO A FORMA NORMALE perchè, non essendoci termini simili, non si può eseguire nessun tipo di operazione.

Se invece si considera il seguente polinomio:

$-2x + \frac{1}{3}xy - 4x^2 + 12\ xy$

si nota che, all'interno di questo polinomio, ci sono due termini simili: $\frac{1}{3}xy$ e $+12\ xy$, sui quali è possibile operare in quanto, poichè sono simili, è possibile addizionarli algebricamente.
In questo caso, dunque, poichè è possibile "lavorare" sul polinomio, si dice che il polinomio NON E' RIDOTTO IN FORMA NORMALE.
Se un polinomio non è ridotto in forma normale si può procedere in modo da renderlo in forma normale; infatti è possibile addizionare i suoi termini simili:

$-2x + \frac{1}{3}xy - 4x^2 + 12\ xy =$

$= -2x + (\frac{1+36}{3})\ xy - 4x^{2\ =}$

$= -2x + \frac{37}{3}xy - 4x^2$ questo è un polinomio che non contiene monomi simili; dunque è un polinomio RIDOTTO IN FORMA NORMALE.

Ciò significa che:
tutte le volte che si ha un polinomio che non è in forma normale, addizionando i termini simili che abbiamo in esso, lo si può far diventare un polinomio ridotto in forma normale;
si dice, infatti, che è avvenuta la riduzione dei termini simili e dunque, il polinomio è diventato ridotto in forma normale.

Vediamo un altro esempio:

$-2ab + 3b + 5c - \frac{5}{6}ab - 4b + 6$

Questo è un polinomio che NON è in forma normale in quanto, al suo interno, ha dei monomi simili.

Eseguiamo la riduzione dei termini simili ossia addizioniamo questi monomi simili così come sappiamo fare:

$= (-2 - \frac{5}{6})\ ab + (+3 - 4)\ b + 5c + 6 =$

$= -\frac{17}{6}ab - 1b + 5c + 6$ questo è un polinomio in forma normale.

RICORDA: DATO UN POLINOMIO CHE NON E' IN FORMA NORMALE, E' **SEMPRE POSSIBILE** RIDURLO A FORMA NORMALE.

Vi faccio notare che, in quest'ultimo polinomio, è presente +6;
+6, come ben sapete, è un numero relativo ma, per quanto studiato con i monomi, sappiamo che ogni numero relativo può essere considerato un **monomio di grado zero** (grado zero perchè, non avendo la parte letterale, è come se ogni lettera avesse come esponente lo zero; da ciò, segue che tutta la parte letterale di questo monomio particolare equivale a 1, che viene sottinteso e non scritto).
E' per questo motivo che i numeri relativi che si trovano all'interno di un polinomio vengono chiamati TERMINI NOTI.

GRADO DI UN POLINOMIO

Dato un polinomio, è possibile stabilire:
- il grado complessivo del polinomio e
- il grado del polinomio rispetto ad una lettera.

GRADO COMPLESSIVO DI UN POLINOMIO

Vediamo che cosa s'intende per **grado complessivo di un polinomio:**
dato un polinomio ridotto a forma normale, il suo GRADO COMPLESSIVO (o semplicemente il suo GRADO) è il maggiore tra i gradi dei singoli monomi che formano il polinomio stesso.

Ricordo che, per grado di un monomio, si intende la somma degli esponenti di tutte le lettere che compaiono in quel monomio!!
Vediamo un esempio:
consideriamo il polinomio di prima:

$-\frac{17}{6}ab - 1b + 5c + 6$ e vediamo il grado di ogni monomio:

$-\frac{17}{6}ab$ ha grado 2

$- 1b$ ha grado 1

$+ 5c$ ha grado 1

$+6$ ha grado 0

Il grado maggiore è quello del monomio $-\frac{17}{6}ab$; infatti questo monomio ha grado 2, tittu gli altri monomi hanno un grado inferiore a 2; dunque, si può affermare che il grado complessivo (o semoplicemente grado) del polinomio

$-\frac{17}{6}ab - 1b + 5c + 6$ è 2.

Vediamo un altro esempio: consideriamo il polinomio

$3a^4b^5c - 6x^7 + \frac{4}{3}a^2b^3 + \frac{4}{5}$

questo è un polinomio *ridotto a forma normale* perchè, in esso non ci sono termini simili.

Vediamo qual è il suo grado complessivo:

$3a^4b^5c \quad -6x^7 \quad + \frac{4}{3}a^2b^3 \quad + \frac{4}{5}$

ha grado 7

ha grado 0

ha grado 10

ha grado 5

Di conseguenza, il grado del polinomio è 10.

GRADO DI UN POLINOMIO RISPETTO AD UNA LETTERA

Vediamo che cosa s'intende per **grado di un polinomio rispetto ad una lettera:**
dato un polinomio ridotto a forma normale, il suo GRADO RISPETTO AD UNA LETTERA è l'esponente maggiore con cui, quella lettera, compare nel polinomio.
Vediamo subito un esempio:
consideriamo il polinomio di prima:

$3a^4b^5c - 6x^7 + \frac{4}{3}a^2b^3 + \frac{4}{5}$

Se vogliamo sapere qual è il grado di questo polinomio rispetto alla lettera a, dobbiamo vedere qual è l'esponente più alto che la lettera a possiede all'interno del polinomio considerato; il suo esponente più alto è 4.
Dunque, **rispetto alla lettera a , il polinomio ha grado 4.**

Se invece vogliamo sapere qual è il grado di questo polinomio rispetto alla lettera b, dobbiamo vedere qual è l'esponente più alto che la lettera b possiede all'interno del polinomio considerato; il suo esponente più alto è 5.
Dunque**, rispetto alla lettera b, il polinomio ha grado 5.**

Se invece vogliamo sapere qual è il grado di questo polinomio rispetto alla lettera c, dobbiamo vedere qual è l'esponente più alto che la lettera c possiede all'interno del polinomio considerato; il suo esponente più alto è 1.
Dunque**, rispetto alla lettera c, il polinomio ha grado 1.**

Se invece vogliamo sapere qual è il grado di questo polinomio rispetto alla lettera y, dobbiamo vedere qual è l'esponente più alto che la lettera y possiede all'interno del polinomio considerato; ma y non compare all'interno del polinomio, quiundi , rispetto ad essa, il polinomio ha grado 0.

E', quindi, molto facile determinare il grado di un polinomio rispetto ad una lettera; basta osservare il polinomio stesso e si ha subito la risposta.

Diamo altre definizioni importanti:
POLINOMIO OMOGENEO
POLINOMIO ORDINATO
POLINOMIO COMPLETO

POLINOMIO OMOGENEO: un polinomio si definisce **omogeneo** quando tutti i suoi monomi che lo compongono hanno lo stesso grado.

Vediamo un esempio:

$5xy + 7x^2 - 14\,ab - \frac{11}{5}y^2$.
Questo è un polinomio(ridotto a forma normale) ed ogni suo monomio ha grado 2.
Dunque, questo è un polinomio omogeneo.

Diversamente, il polinomio

$8x + 12\,ab - \frac{4}{5} - xyz$

è un polinomio (ridotto a forma normale) ma non è omogeneo perchè i suoi monomi non hanno tutti lo stesso grado, infatti:

$8x$ ha grado 1

$+ 12\,ab$ ha grado 2

$- \frac{4}{5}$ ha grado 0

$-xyz$ ha grado 3

POLINOMIO ORDINATO: Un polinomio di definisce **ordinato** rispetto ad una lettera se,nel polinomio considerato, gli esponenti di tale lettera compaiono in ordine crescente (o decrescente).
Cerchiamo di chiarire questa definizione:
consideriamo il polinomio:

$+8xy + \frac{1}{6}x^3y^2 - 4\ y^4 + \ x^5\ y^5$

Vediamo se questo polinomio, così come è scritto (cioè senza modificare l'ordine dei monomi) è ordinato rispetto alla lettera x; ciò vuol dire che

bisogne vedere se gli esponenti della x sono sistemti in ordine crescente (o decrescente) all'interno del polinomio.
Vediamo:
il primo esponente di x è 1, poi c'è il 3, poi c'è 0, poi c'è 5.

Come si può facilmente concludere, i numeri 1; 3; 0; 5 non sono disposti in nessun ordine.
Dunque, il polinomio in questione NON E' ORDINATO rispetto alla lettera x.

Vediamo ora se questo polinomio, sempre così come è scritto (cioè senza modificare l'ordine dei monomi) è ordinato rispetto alla lettera y; ciò vuol dire che
bisogne vedere se gli esponenti della y sono sistemati in ordine crescente (o decrescente) all'interno del polinomio.
Vediamo:
riscriviamo il polinomio per averlo sotto gli occhi:
$+8xy + \frac{1}{6}x^3y^2 - 4\ y^4 + \ x^5\ y^5$

il primo esponente di y è 1, poi c'è il 2, poi c'è 4, poi c'è 5.
Come si può facilmente concludere, i numeri 1; 2; 4; 5 sono disposti in ordine crescente.
Dunque, il polinomio in questione E' ORDINATO rispetto alla lettera y.

N.B. Come avrete notato, nella successione 1; 2; 4; 5 manca il numero 3, ma ciò non è importante per stabilire se un polinomio è ordinato rispetto ad una lettera oppure no.
L'importante è che i numeri siano in ordine (crescente o decrescente), non importa se ci sono"salti" di numeri tra un numero e l'altro.

POLINOMIO COMPLETO: Un polinomio si dice **completo** rispetto ad una lettera se, in esso, compaiono tutte le potenze di quella lettera , da quella di grado massimo a quella di grado zero.

Vediamo cosa significa questa definizione.
Consideriamo il polinomio:

$-2a^4b + \frac{3}{2}a^2b^2 - \frac{5}{4}a^3b^4 - \frac{1}{2}a + 7$

Vediamo se è completo rispetto alla lettera a:
per essere completo rispetto alla lettera a occorre che ci siano tutte le potenze di a dal grado 4(che è l'esponnete più alto posseduto da a in questo polinomio) al grado 0 (esponnte più basso possibile).
Vediamo:
la potenza 4 di a c'è;
la potenza 3 di a c'è;

la potenza 2 di a c'è;
la potenza 1 di a c'è;
la potenza 0 di a c'è.

Dunque, rispetto ad a, il polinomio è completo.
NON IMPORTA SE LE POTENZE DI a COMPAIONO IN ORDINE SPARSO, perchè qui stiamo valutando se il polinomio è completo, NON se è ordinato

Vediamo se è completo rispetto alla lettera b:

$-2a^4b + \frac{3}{2}a^2b^2 - \frac{5}{4}a^3b^4 - \frac{1}{2}a + 7$
per essere completo rispetto alla lettera b occorre che ci siano tutte le potenze di b dal grado 4(che è l'esponente più alto posseduto da b in questo polinomio) al grado 0 (esponnte più basso possibile).
Vediamo:
la potenza 4 di b c'è;
la potenza 3 di b non c'è;
la potenza 2 di b c'è;
la potenza 1 di b c'è;
la potenza 0 di b c'è.

Dunque, poichè manca la potenza 3 di b, il polinomio non è completo rispetto alla lettera b.

Vediamo di ricapitolare: consideriamo i seguenti polinomi e analizziamoli:

	omogeneo	Ordinato rispetto ad x	Ordinato rispetto a y	Completo rispetto a x	Completo rispetto a y
$x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - \frac{1}{2}xy^3 + y^4$	NO(i monomi hanno grado diverso)	SI'	SI'	SI'	SI'

	Omogeneo	Ordinato rispetto ad a	Ordinato rispetto a b	Completo rispetto ad a	Completo rispetto a b
$3a^5 b - 3ab^5 + \frac{7}{8}a^2b^3 - 12a^3b^4$	NO(i monomi hanno grado diverso)	NO (le potenze di a non sono in ordine)	NO(le potenze di b non sono in ordine)	NO(manca la potenza 0 e la potenza 4)	NO (manca la potenza 0 e la potenza 2

Esercizi da svolgere :
pag.58 n.1, 2, 3;
pag. 80 n.186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194
Alcuni dei precedenti esercizi possono essere svolti sul libro.

Svolgere anche le seguenti espressioni:

522 $(17x^3y^2 + 4x^2y - 5x) - (10x^3y^2 + 4x^2y - 7x) + (3x^3y^2 + 2x^2y - 9x)$ $\quad [10x^3y^2 + 2x^2y - 7x]$

523 $(8a^2b + 3ab - b^2) + (5ab - 8a^2b + 5b^2) - (-3a^2b + 8ab - 3b^2)$ $\quad [3a^2b + 7b^2]$

586 $-\frac{3}{4}a - \left[\frac{9}{5}ab - \frac{1}{5}a + \left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{2}a - 1\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}b\right] + \frac{5}{9}b$ $\quad \left[-\frac{21}{20}a - \frac{9}{5}ab + \frac{3}{2}\right]$

587 $2 + a - \left[\frac{3}{2}a - (2 + 4b)\right] - \left[\frac{2}{3}b + \left(4 - \frac{3}{5}a\right)\right] + \frac{1}{5}a + \frac{5}{3}b$ $\quad \left[\frac{3}{10}a + 5b\right]$

588 $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}x - \left[\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}y - \left(\frac{11}{5}y - 2\right) - \frac{4}{9}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}\right] - \frac{7}{15}y$ $\quad \left[\frac{37}{45}x + \frac{2}{3}y - 2\right]$

Guardare il video al seguente link:

https://youtu.be/dIwAdTwsyLw per ricapitolare quanto è stato spiegato.

Inoltre, guardare il video
https://youtu.be/KE3P2Pl9zCo come anticipazione del prossimo argomento: moltiplicazione tra monomi e polinomi.